

CHƯƠNG

III

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 4 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

Lời giải

Trả lời: 6

Hàm số $y = f(x) = 4 - 3x^2$ liên tục, nhận giá trị dương trên $[-1; 1]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = 4x - x^3$. Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(1) - F(-1) = 6$.

Câu 2: Biết diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 12x + 9$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = a$ ($a > 1$) bằng 6. Tìm a ?

Lời giải

Trả lời: 2

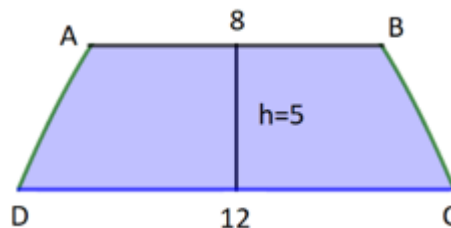
Hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 12x + 9$ liên tục, nhận giá trị dương trên $[1; a]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = x^4 - 6x^2 + 9x$. Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là

$$S = F(a) - F(1) = a^4 - 6a^2 + 9a - 4 = 6.$$

Phương trình có nghiệm $a = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $a = 2$

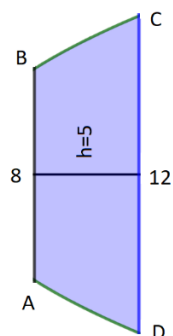
Câu 3: Một mảnh đất có hình dạng là hình thang cong có các thông số như hình vẽ, biết phần đường cong là phần đồ thị của hàm số $y = a\sqrt{x}$. Diện tích của mảnh đất đó là bao nhiêu?



Lời giải

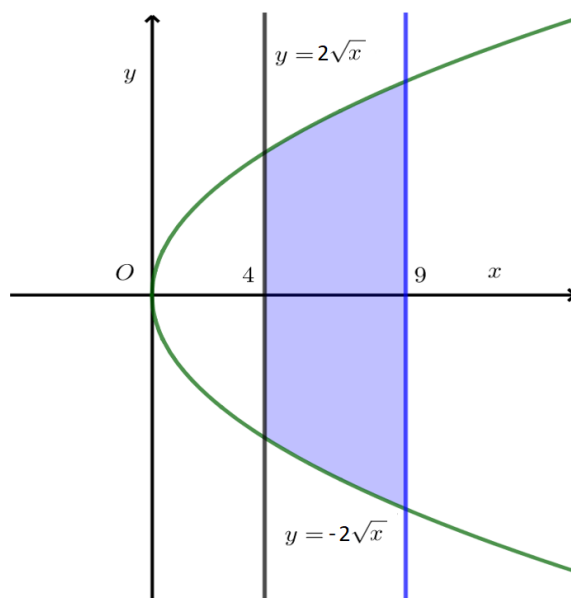
Trả lời: 50,7

Đưa hình vẽ về dạng của hàm số $y = a\sqrt{x}$:



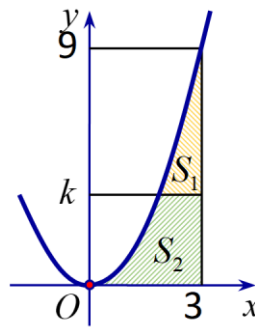
Chọn hệ trục Oxy với Ox đi qua chính giữa trục của mảnh đất (theo chiều của chiều cao), gốc tọa độ O cách điểm chính giữa của đoạn AB là 4, khi đó ta có: $y_B = 4, y_C = 6$ nên $B(4;4), C(9;6)$.

Do đó, dễ được: $a = 2$



Nên: $S = 2 \int_4^9 2\sqrt{x} dx = \frac{152}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 9$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

Lời giải

Trả lời: 2,25

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = k$ là $x = \sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^3 (x^2 - k) dx$, diện tích $S_2 = \int_0^3 x^2 dx - S_1$.

$$\text{Ta có: } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{\sqrt{k}}^3 (x^2 - k) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} - kx \right) \Big|_{\sqrt{k}}^3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 9 - 3k - \frac{\sqrt{k^3}}{3} + \sqrt{k^3} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 18k - 4\sqrt{k^3} - 27 = 0 \Leftrightarrow 4(\sqrt{k})^3 - 18(\sqrt{k})^2 + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{k} = \frac{3-3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{k} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{k} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{9}{4}.$$

Câu 5: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các phương tiện giao thông (trừ xe hai bánh) khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ bỗng gặp một xe bán tải đang dừng đèn đỏ nên ô tô hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t) = 20 - 5t$ (m/s). Hỏi rằng để hai xe đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại, ô tô cần phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 41

Ta có: $v(0) = 20m/s$.

Khi xe ô tô dừng hẳn: $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4s$.

Quãng đường từ lúc xe ô tô hãm phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s = \int_0^4 (20 - 5t) dt = \left(20t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 40(m)$$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là 41m.

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5

Xe dừng lại khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (s).

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$\int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(20t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ m}$$

Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45 - 40 = 5$ m.

Câu 7: Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t) = 20 + 1,5(t - 6)$, $6 \leq t \leq 12$. Tìm nhiệt độ trung bình (đơn vị độ C) vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Lời giải

Trả lời: 24,5

Ta có: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Do đó, nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là

$$\frac{1}{12-6} \int_6^{12} (20 + 1,5(t - 6)) dt = 24,5^{\circ}\text{C}.$$

Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây (đơn vị m^3).

Lời giải

Trả lời: 1458

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

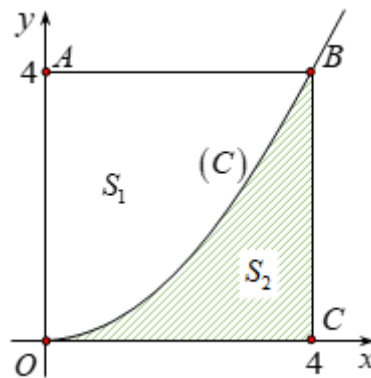
$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases} \text{. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:}$$

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3).$$

Câu 9: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1 , S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ).

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Lời giải

Trả lời: 2

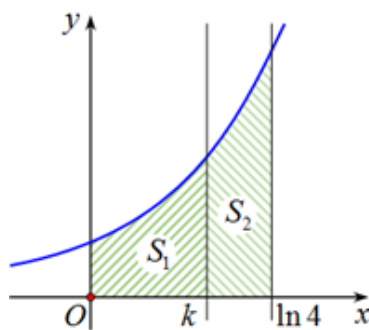
Hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ liên tục và dương trên đoạn $[0; 4]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = \frac{x^3}{12}$

Do đó diện tích hình thang cong S_2 là: $S_2 = F(4) - F(0) = \frac{4^3}{12} - 0 = \frac{16}{3}$

và diện tích hình vuông $S_{OABC} = 4^2 = 16$ nên $S_1 = S_{OABC} - S_2 = \frac{32}{3}$.

Do đó $\frac{S_1}{S_2} = 2$.

Câu 10: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 , S_2 và như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1 = 2S_2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 1,1

Hàm số $y = e^x$ liên tục và dương trên các đoạn $[0; k]; [k; \ln 4]$ và có một nguyên hàm là

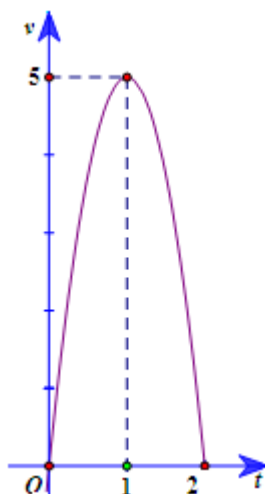
$$F(x) = e^x$$

Do đó diện tích hình thang cong S_1, S_2 là: $S_1 = F(k) - F(0) = e^k - e^0 = e^k - 1$

$$S_2 = F(\ln 4) - F(k) = e^{\ln 4} - e^k = 4 - e^k$$

Theo đề ra: $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \approx 1,1$.

Câu 11: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



Lời giải

Trả lời: 5,63

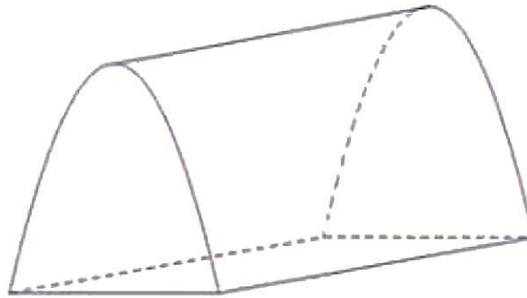
Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S = \int_0^{1,5} v(t) dt$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

$$\text{Đồ thị } v = v(t) \text{ có đỉnh là } I(1;5) \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$$

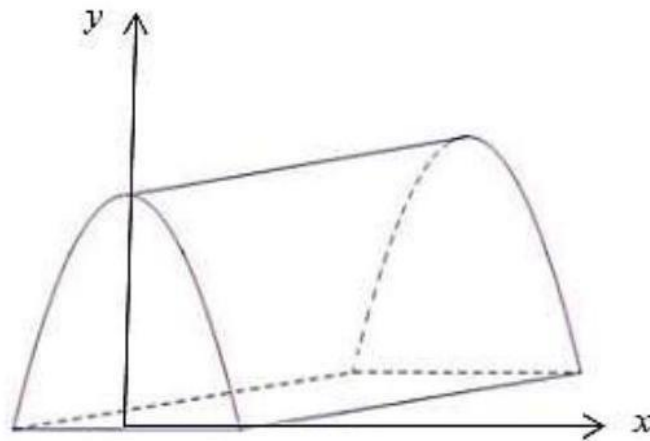
$$S = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63.$$

Câu 12: Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là $4m$ (lối vào lều), chiều dài là $6m$, đỉnh parabol cách nền $3m$. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Lời giải

Trả lời: 48



Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ có đỉnh $C(0;3)$, đi qua hai điểm $A(-2;0)$ và $B(2;0)$ nên

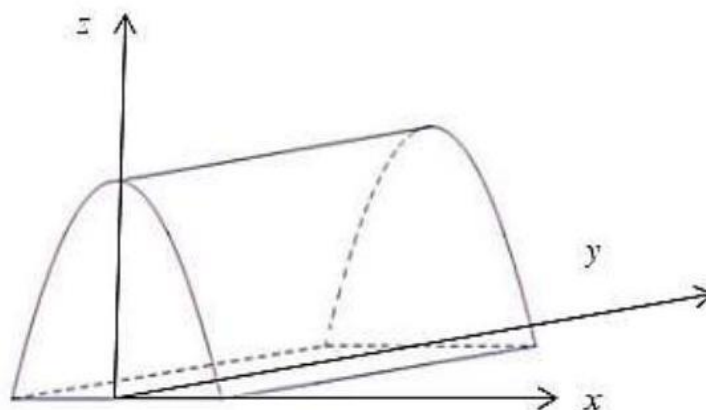
$$\text{có hệ phương trình } \begin{cases} 0.a + 0.b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } (P): y = -\frac{3}{4}x^2 + 3.$$

Diện tích mặt trước của lều trại là

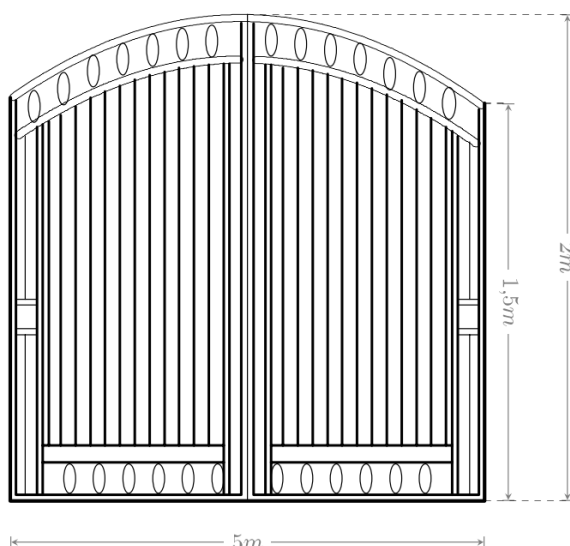
$$S = \int_{-2}^2 \left(3 - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = 8(m^2)$$

+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



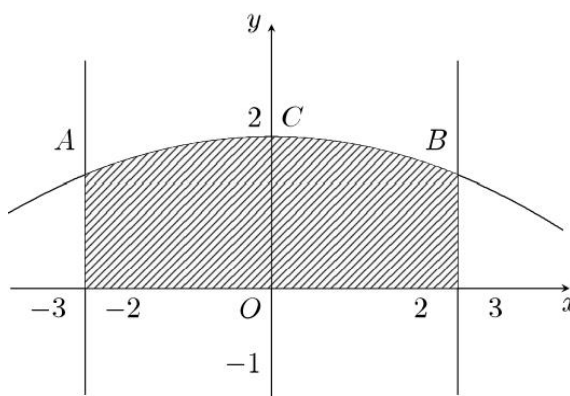
Khi đó thể tích phần không gian bên trong lều trại là $V = \int_0^6 8dx = 48(m^3)$.

Câu 13: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



Lời giải

Trả lời: 6417



Trong đó $A(-2, 5; 1, 5), B(2, 5; 1, 5), C(0; 2)$

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

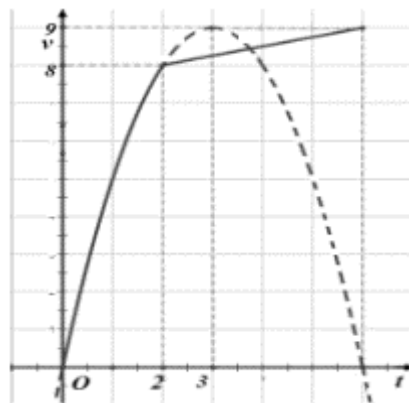
$y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5; x = 2,5$. Ta có

$$S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S \times 700000 = \frac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000$

(đồng).

Câu 14: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ là $\frac{a}{b}$, $(a,b)=1$. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 127

Gọi $(P): y = at^2 + bt + c (a \neq 0)$.

+ Vì Parabol đi qua $O(0; 0)$ và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 3 \\ 3^2 \cdot a + b \cdot 3 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 6a + b = 0 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

Ta có phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0; 2]$

+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6; 9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}; \forall t \in [2; 6]$

+ Quãng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^2 (-t^2 + 6t) dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2} \right) dt = \frac{130}{3} (km)$$

Câu 15: Một ca nô cao tốc có tốc độ v (km/phút) thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t < 2, \\ 2 & 2 \leq t < 15, \text{ với } a \in \mathbb{R}. \\ 4 - at, & 15 \leq t \leq 20. \end{cases}$$

Biết quãng đường ca nô di chuyển được trong thời gian 20 phút bằng 28,9 km. Giá trị của a bằng

Lời giải

Trả lời: 0,2

Quãng đường ca nô di chuyển trong thời gian 20 phút bằng:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 at dt + \int_2^{15} 2 dt + \int_{15}^{20} (4 - at) dt = \left(\frac{at^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 2t \Big|_2^{15} + \left(4t - \frac{at^2}{2} \right) \Big|_{15}^{20} \\ &= 2a + 26 + (20 - 87,5a) = 46 - 85,5a \end{aligned}$$

Vậy $S = 28,9 \Leftrightarrow a = 0,2$

Câu 16: Một vật được ném lên từ độ cao 300m với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43 (m/s)$. Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Hỏi khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu vật được ném đến lúc chạm đất xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 11,4

$$\text{Ta có } h(t) = \int v(t) dt = \int (-9,81t + 29,43) dt = \frac{-9,81t^2}{2} + 29,43t + C$$

$$\text{Theo giả thiết } h(0) = 300 \Rightarrow c = 300$$

$$\text{Vật chạm đất khi } h(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-9,81t^2}{2} + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx -5,4 \\ t \approx 11,4 \end{cases}$$

$$\text{Do } t > 0 \text{ nên } t \approx 11,4(s)$$

Câu 17: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau một ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 2352

$$\text{Ta có: } P(t) = \int P'(t) dt = \int k\sqrt{t} dt = k \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\text{Số lượng vi khuẩn của ban đầu của quần thể đó là 500 vi khuẩn hay } P(0) = 500 \Leftrightarrow C = 500.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P(t) = k \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 500.$$

Sau một ngày số lượng vi khuẩn của quần thể đó tăng lên thành 600 vi khuẩn hay

$$P(1) = 600 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot k + 500 = 600 \Leftrightarrow k = 150.$$

$$\text{Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm } t \text{ là } P(t) = 100 \cdot t^{\frac{3}{2}} + 500$$

$$\text{Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là: } P(7) = 100 \cdot 7^{\frac{3}{2}} + 500 \approx 2352.$$

Câu 18: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Lời giải

Trả lời: 28

Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút.

$$\text{Ta có } T(t) = \int f(t) dt = \int 3t^2 dt = t^3 + C.$$

Vì người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C nên

$$T(0) = 1^{\circ} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow T(t) = t^3 + 1.$$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $T(3) = 3^3 + 1 = 28(^{\circ}\text{C})$.

Câu 19: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Trả lời: 226

$$\text{Ta có } P(t) = \int P'(t) dt = \int (8t + 30) dt = 4t^2 + 30t + C.$$

Lại có ban đầu người ta thả 100 cá thể gấu mèo:

$$P(0) = 100 \Rightarrow C = 100 \Rightarrow P(t) = 4t^2 + 30t + 100.$$

Vậy số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3) = 4 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 100 = 226 \text{ cá thể.}$$

Câu 20: Nhằm tri ân người dân Bình Thuận đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, Tập đoàn Nova đã tổ chức ngày hội “Cảm ơn Bình Thuận” vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 200$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

Trả lời: 3072

$$\text{Ta có } B(t) = \int B'(t) dt = t^4 - t^3 + 200t + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow B(2) = 1200 \Rightarrow C = 792.$$

$$\text{Suy ra } B(t) = t^4 - t^3 + 200t + 792$$

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6) = 3072$ (người).

Câu 21: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng ($x > 0$). Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu

diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -10x + 200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 20

Ta có: $T(x) = \int T'(x) dx = \int (-10x + 200) dx = -5x^2 + 200x + C, C \in \mathbb{R}$.

Khi giá cho thuê mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng nên ta có $T(10) = 1800 \Rightarrow C = 300$.

Vậy $T(x) = -5x^2 + 200x + 300 = -5(x - 20)^2 + 2300 \leq 2300$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20$.

Suy ra doanh thu cao nhất mà chủ trung tâm thương mại có thể thu về là 2300 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng có giá cho thuê là 20 triệu đồng.

Vậy $x = 20$ (triệu đồng).

Câu 22: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} 0,5t, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 15 \\ 4 - 0,2t, & 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Lời giải

Trả lời: 16,5

Quãng đường chuyển động của ca nô là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^2 (0,5t) dt + \int_2^{15} 1 dt + \int_{15}^{20} (4 - 0,2t) dt \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 + (t) \Big|_2^{15} + \left(4t - \frac{1}{10} t^2 \right) \Big|_{15}^{20} = 1 + 15 - 2 + 40 - 37,5 = 16,5 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Câu 23: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Lời giải

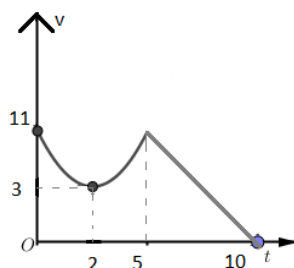
Trả lời: 1280

Vật dừng lại khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$.

Như vậy Quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian tương ứng là:

$$S = \int_0^{16} v(t) dt = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = (160t - 5t^2) \Big|_0^{16} = 1280 \text{ (m)}$$

Câu 24: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Trả lời: 65,8

Gọi Parabol $(P): y = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của chất điểm khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua $A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow y = 2t^2 - 8t + 11$$

Gọi $d: y = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của chất điểm khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;11)$ và $C(10;0)$ nên:

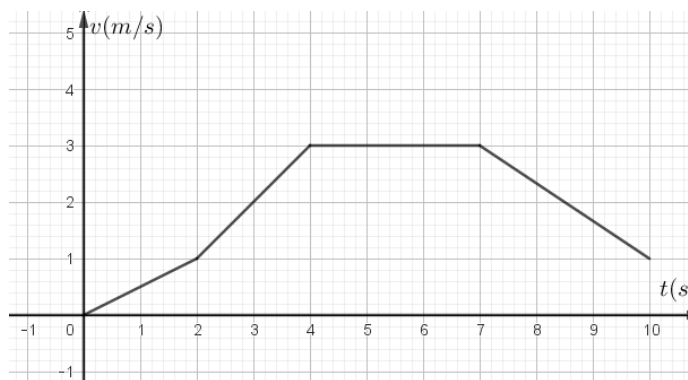
$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{11}{5}t + 22$$

Như vậy phương trình biểu thị vận tốc của chất điểm là $v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{11}{5}t + 22, & 5 < t \leq 10 \end{cases}$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 10(s)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^5 (2t^2 - 8t + 11) dt + \int_5^{10} \left(-\frac{11}{5}t + 22\right) dt \\ &= \left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t\right) \Big|_0^5 + \left(-\frac{11t^2}{10} + 22t\right) \Big|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6} (m) \approx 65,8(m) \end{aligned}$$

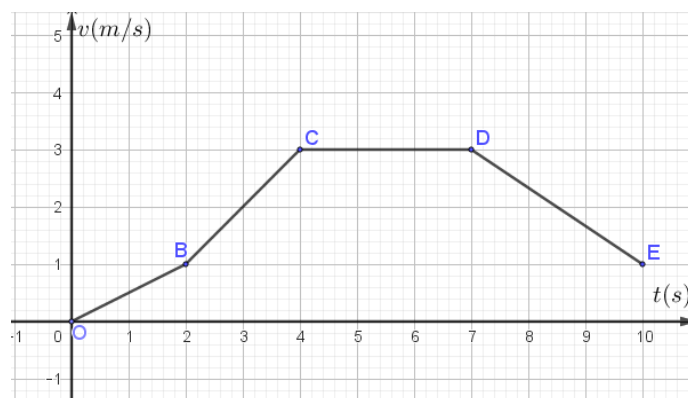
Câu 25: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Trả lời: 2

Theo đồ thị ta có:



PT đường thẳng $OB: v = \frac{1}{2}t$

PT đường thẳng $BC: v = t - 1$

PT đường thẳng $CD: v = 3$

PT đường thẳng $DE: v = -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}$

$$\text{Suy ra: } v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \leq t \leq 2 \\ t-1, & 2 < t \leq 4 \\ 3, & 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}, & 7 < t \leq 10 \end{cases}.$$

Quãng đường chuyển động của vật trong 10 giây là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt + \int_4^7 v(t) dt + \int_7^{10} v(t) dt$$

$$S = \int_0^2 \frac{1}{2}t dt + \int_2^4 (t-1) dt + \int_4^7 3 dt + \int_7^{10} \left(-\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}\right) dt = 20 \text{ (m)}$$

Vận tốc trung bình của chuyển động là: $v_{tb} = \frac{S}{10} = 2 \text{ (m/s)}$

Câu 26: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (m/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

$$v(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 20t + 800, & 10 < t \leq 20 \\ -10t + 1400, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Lời giải

Trả lời: 917

Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$S = \int_0^{30} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{20} v(t) dt + \int_{20}^{30} v(t) dt$$

$$S = \int_0^{10} 100t dt + \int_{10}^{20} (20t + 800) dt + \int_{20}^{30} (-10t + 1400) dt = 27500 (m)$$

Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb} = \frac{S}{30} = \frac{2750}{3} \approx 917$ (m/phút).